التحليل العددي : Numerical Analysis

هو مجال مكمل للرياضيات ومدعم لإمكانياتها في حل المسائل وتحليل المنظومات في شتى مجالات المعرفة، ويشتمل على مجموعة من الأدوات والأساليب والطرق التي تمكننا من إيجاد الحلول المطلوبة في عدد محدود من الخطوات، وبالدرجة المطلوبة من الدقة accuracy
وأحياناً، قد يكون من الممكن إيجاد حل تحليلي مضبوط exact لمسألة ما، بواسطة اختصارات رياضية، بعد ذلك نحصل على قيم عددية للمتغيرات المسألة بالتعويض المباشر في الصيغ التحليلية ~~المطلوبة~~ المضبوطة. ومن الواضح أن هذا الأسلوب ليس تحليلاً عددياً للمسألة ولكنه تحليل رياضي وإن اشتمل على خطوات حسابية
في معظم المسائل والمنظومات الهندسية وغيرها تكون العلاقات بين المتغيرات متشابكة، وتكون الدوال التي تعبر عن هذه المتغيرات معقدة نسبياً وقد لا تحقق كل الشروط المطلوبة لطرق التحليل الرياضي من استمرارية، وقابلية للتفاضل وغيرها، وقد تكون العلاقات بين المتغيرات المختلفة على هيئة جداول بيانات عند نقاط محدودة فقط، عندئذ يصبح استخدام أساليب التحليل العددي وطرقه المختلفة ضرورياً لإيجاد الحلول المناسبة للمسألة.

ويرتبط التحليل العددي ارتباطاً مباشراً بالحاسوب، فبالرغم من أن استخدام التحليل العددي قد سبق ظهور الكمبيوتر بزمن طويل إلا أن مجالات هذه الاستخدامات كانت محدودة. ومع تطور وانتشار الحاسوب تطورت طرق التحليل العددي حتى أصبحت الأداة الرئيسية في تحليل المنظومات والمحاكاة.

بعض المفاهيم الرياضية المهمة:

تعريف (1) $f(x)$ دالة حقيقية أي $f(x)\in R$ فيقال بأن الدالة $f(x)$ تؤول إلى L عند النقطة x_0 أي $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$
إذا كان

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \ni |f(x)-L|<\varepsilon \quad \forall x\in R ,\ 0<|x-x_0|<\delta$$

ويقال بأن الدالة متصلة عند النقطة x_0 إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

تعريف (2) : $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to L$ أي أن $\lim_{n \to \infty} x_n = L$
أي أن المتتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ للأعداد الحقيقية تقترب إذا كان
يوجد عدد حقيقي L حيث $\lim_{n \to \infty} x_n = L$

تعريف (3) إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $x \in (a,b)$
فإن الدالة تكون قابلة للتفاضل عند النقطة $x_0 \in (a,b)$ إذا
كانت $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ لها وجود ويرمز لها بالرمز $f'(x)$

نظرية (1) : "نظرية رول"
نفرض أن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل
على الفترة (a,b) وكانت $f(a) = f(b) = 0$ فإنه يوجد c
حيث $c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$

نظرية (2) : "نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل"
إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل
على الفترة (a,b) فإنه يوجد عدد c حيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} , \quad c \in (a,b)$$

نظرية (3) : "نظرية القيمة المتوسطة للتكامل"
إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وأن الدالة
$g(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ وقابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد
عدد حقيقي $c \in (a,b)$ حيث

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d(x) = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

* نظرية (4) : "نظرية القيمة الوسيطة" : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على
الفترة $[a,b]$ وأن K هو عدد حقيقي بين $f(a)$ ، $f(b)$ فإنه يوجد
عدد آخر $c \in (a,b)$ حيث $f(c) = K$.

مثال: اثبت أن المعادلة $x^6+5x^5+2x^2+x-1=0$ لها جذر في الفترة $[0,1]$.

$$f(x)=x^6+5x^5+2x^2+x-1$$

هي متصلة على الفترة $[0,1]$ وإن $f(0)=-1$ ، $f(1)=8$

وحيث أن $f(0)<0<f(1)$ ، فمن النظرية (4) يتحقق بأن

هناك عدد $(0<x<1)$ يحقق المعادلة.

المصفوفات:

تعرف المصفوفة A ذات الرتبة $(m\times n)$ على أنها الصفة المرتبة للأعداد الحقيقية (a_{ij}) وتكتب على الصورة

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفة هي منظومة من الأعداد مرتبة على شكل صفوف وأعمدة عدد الصفوف $= m$ ، عدد الأعمدة $= n$

والعدد a_{ij} يسمى عنصر في المصفوفة A حيث i تمثل الصف

j تمثل العمود.

* ملاحظة: إذا احتوت المصفوفة على عمود واحد فإنها تسمى بمصفوفة متجه العمود ويرمز له بالرمز $\underline{X}$ أي من رتبة $(m\times 1)$

وإذا احتوت المصفوفة على صف واحد فإنها تسمى مصفوفة ذات صف واحد أي من رتبة $(1\times n)$

* ملاحظة: إذا تساوت الصفوف بالأعمدة أي إذا كانت $m=n$ فإن المصفوفة A تسمى بالمصفوفة المربعة.

منقول المصفوفة: هي المصفوفة التي تغير صفوفها أعمدة والأعمدة بالصفوف ويرمز لها بالرمز A^T

* نقول بأن المصفوفتين $A=(a_{ij})$ ، $B=(b_{ij})$ متساويتان أي

$A=B$ إذا كانت العناصر المتناظرة متساوية أي أن

$a_{ij}=b_{ij}$ لكل $i,j=1,2,\dots$

* يعرف حاصل جمع أو طرح مصفوفتين متساويتين بالبعد كما يأتي

$$A \pm B = C$$

حيث $A_{m\times n}, B_{m\times n}$ وكذلك $C_{m\times n}$

فإن $a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$ لكل i, j

* شرط إتمام ضرب مصفوفتين هو أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية وتكون رتبة المصفوفة الناتجة عن الضرب هي عدد صفوف الأولى × عدد أعمدة الثانية

أي أنه إذا كانت $A_{m\times n}$ ، $B_{n\times r}$ فإن

$$A_{m\times n} \times B_{n\times r} = C_{m\times r}$$

حيث

$$C_{ij} = [A \text{ الصف } i \text{ للمصفوفة}] \begin{bmatrix} \text{العمود} \\ j \\ \text{للمصفوفة } B \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

* بعض خواص ضرب المصفوفات :

1. $AB \neq BA$
2. $A(BC) = AB(C)$
3. $A(B+C) = AB + AC$
4. $(A+B)C = AC + BC$

* مصفوفة الوحدة (I) تعرف كما يأتي

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

قياس المتجهات والمصفوفات :

يستخدم مفهوم القياس (Norm) لتحديد المسافة بين نقطة ونقطة الأصل في المستوى R^n ويرمز له بالرمز $\|\cdot\|$ وهو دالة تسمى المستوى R^n إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R ولها الخواص التالية:

1. $\|x\| \geq 0$ لكل $x \in R^n$
2. $\|x\| = 0 \iff x = (0,0,\ldots,0)^T = 0$

3. $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \, \|\underline{x}\| \quad , \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4. $\|\underline{x} + \underline{y}\| \le \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall \; \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

تعريف (4): تعرف المقياس الأول $L_1 \; (\|\cdot\|_1)$ والمقياس الإقليدي $L_2 \; (\|\cdot\|_2)$ والمقياس اللانهائي $L_\infty \; (\|\cdot\|_\infty)$ للمتجه $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ بالتعريفات التالية

$L_1: \|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$L_2: \|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

$L_\infty: \|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} = \max_{1\le i\le n} |x_i|$

مثال: المتجه $\underline{x} = (1, -2, 1)^T \in \mathbb{R}^3$ لديه المقاييس الآتية

$\|\underline{x}\|_1 = |1| + |-2| + |1| = 4$

$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |1|^2} = \sqrt{6}$

$\|\underline{x}\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |1|\} = 2$

تعريف (5): إذا كان $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ، $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ متجهين بالمستوى $\mathbb{R}^n$ فإن المسافة بينهما تعرف كالآتي:

$\|\underline{x} - \underline{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$\|\underline{x} - \underline{y}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$

$\|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \{|x_i - y_i|\}$

تعريف (6): يقال لفئة المتجهات المتتابعة $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ للمستوى $\mathbb{R}^n$ بأنها تقترب من $\underline{x}$ بالنسبة للمقياس $\|\;\|$ إذا كانت لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ بحيث $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| > \varepsilon$ لكل $k > N(\varepsilon)$

نظرية (5): يقال لفئة المتجهات $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ تقترب للمتجه $\underline{x}$ بالنسبة للمقياس $\|\cdot\|_\infty$ إذا كان وفقط

$$\lim_{k\to\infty} \{x_i^{(k)}\} = x_i \quad , i = 1,2,\dots,n$$

مثال: أثبت بأن المتابعة $\{\underline{x}^{(k)}\}$ المعرفة كالآتي:

$$\underline{k}^{(k)} = (k^{-1}, e^{1-k}, -2k^{-2})^T$$

تقترب من المتجه $\underline{x} = (0,0,0)^T$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \quad , \quad \lim_{k\to\infty} e^{1-k} = 0 \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{-2}{k^2} = 0$$

∴ المتابعة $\{\underline{x}^k\}$ تقترب من المتجه $\underline{x} = (0,0,0)^T$ بالنسبة للمقياس $\|\cdot\|_\infty$

نظرية (6): إذا كانت المصفوفة $A_{n\times n} = (a_{ij})$ فإن

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$ فإن

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |3| + |0| = 4$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |1| + |5| + |4| = 10$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |0| + |0| + |10| = 10$$

$$\therefore \|A\|_\infty = \max\{4, 10, 10\} = 10$$

الجامعة المفتوحة
طرابلس

تحليل عددي

أ. محمد علي سالم
2015/10/11

(1)

* المحاضرة الأولى :

- الأخطاء : Errors :- تنتج الأخطاء نتيجة لعدم حصولنا على القيمة الحقيقية فالخطأ من وجهة النظر الرياضية للعدد ما هو الفرق بين القيمة المحسوبة والقيمة الدقيقة (الحقيقية).

- مصادر الأخطاء :

1) خطأ النموذج الرياضي : قد يحدث في عالمنا الواقعي بأن بعضاً من مشاكلنا التي تصادفها قد يصعب علينا وضعها في نموذج نستطيع التعامل معه بصورة رياضية، وحتى لو إفترضنا وضعه على صورة نموذج رياضي في بعض الحالات فقد يكون حل هذا النموذج مستحيلاً الأمر الذي يتطلب الإستعانة بنموذج تقريبي مؤدياً إلى إستحداث خطأ في الحلول.

2) الخطأ البشري : هنالك بعض من الأخطاء ناتجة عن الأرقام من حيث كتابتها أو اجراء العمليات الحسابية عليها ففي الحاسبات الآلية قد تحدث أخطاء نتيجة عمليات الإدخال وقد تكون تكون هناك أخطاء بالبرنامج نفسه وهي أخطاء قد يصعب اكتشافها بسهولة.

3) خطأ الآلة : مهما كانت دقة صناعة الآلة فهناك احتمال وجود أخطاء نتيجة إستعمالنا لأدوات القياس مثلاً مهما كانت دقة قياسها فهي محدودة كالموازين وأجهزة قياس الضغط الجوي مثلاً ... وغيرها فجهاز الحاسب الآلي لا يستطيع أن يخزن كل الأرقام بدقة متناهية. فالعدد ($\frac{1}{3} = 0.333...3$) لا يمكن تخزينه بصورة تامة بالنظام العشري حيث يتم تخزين جزء منه حسب قدرة الجهاز ونوعيته وحسب تصميم المخزن الداخلي للجهاز، الأمر الذي تترتب عليه إستحداث أخطاء نتيجة هذا التخزين نلخصها في الآتي :

(أ) خطأ التقريب : ينتج هذا النوع من الخطأ من أن عدد الخانات الثنائية (طول الكلمة بالحاسب محدودة) فتقريب العدد إلى عدد الخانات الثنائية

المحددة بالجهاز يترتب عليه خطأ هو ما نسميه بالخطأ المقرب.

(ii) خطأ البتر: ينتج عادة هذا النوع من الخطأ عند الحاجة إلى استخدام نموذج يستدعي فيه الاستغناء عن بعض من حدود مجموعة لانهائية كالمتسلسلات.

مثلاً: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

قد نستخدم عشرة حدود فقط في هذه المتسلسلة لتقريب الدالة e^x: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^9}{9!}$

يكون في هذه الحالة مقدار الخطأ هو مجموع الحدود الباقية (المبتورة) من المتسلسلة اللانهائية وهي: $E = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

- ويمكن تلخيص الأخطاء الناتجة عن الحاسب الآلي خلاف أخطاء الإدخال والإخراج كالآتي: 1. أخطاء الجريان الفوقي والتحتي Over flow – under flow Errors: يحدث هذا النوع من الخطأ نتيجة العمليات الحسابية التي ينتج عنها أعداد كبيرة جداً أو صغيرة جداً لا يمكن تخزينها بالجهاز ولتفادي هذا النوع من الأخطاء يجب أن نتحكم في العمليات الحسابية وذلك بحصر نتائج هذه العمليات بالقرب من (± 1) أي بجعل مميز الأس قريباً من الصفر على سبيل المثال إذا كانت قيم المتغيرات a, b, c معروفة فيمكن حساب العملية الحسابية $\left(\frac{ab}{c}\right)$ كالآتي:

$$\frac{ab}{c} = \begin{cases} (ab)/c & \text{إذا كانت إحدى القيمتين } |a|, |b| \text{ كبيرة والباقي صغير} \\ a(b/c) & \text{إذا كانت القيمتان } |c|, |b| \text{ كبيرتان أو صغيرتان} \\ b(a/c) & \text{ — — — } |a|, |c| \text{ — —} \end{cases}$$

2. الخطأ الدائري المقرب: وهو الخطأ الناتج عن عدم استخدام كل الثنائيات للعدد الثنائي المخزن وذلك عندما تكون العمليات الحسابية قد أجريت على جهاز للدقة المفردة وهو ناتج من مجموعة مؤثرات منها: (1) الخطأ الوراثي المقرب: وهو نتيجة تخزين العدد الثنائي الممثل لتقريب العدد الحقيقي، حيث أن معظم الأعداد الحقيقية

لا يمكن تخزينها بكاملها في جهاز مجزوء الكسري مكون من (م ثنائية) فالعدد العشري (0.1) عند تمثيله بالنظام الثنائي يكون :

$$(0.1)_{10} = (0.000110011001100\ldots)_2$$
$$= (0.110011001100\ldots)_2 \times 2^{-3}$$

هنا الجزء الكسري غير منتهي وبالتالي لا يمكن تخزينها بالتمام يجب أن نبتر العدد حسب حجم الكلمة بالحاسب الآلي مثلا بذلك نوع من الخطأ أثر تخزينها بالجهاز خلاف الأخطاء الناتجة عن العمليات الحسابية بالنسبة لهذا العدد

لتقليل هذا النوع من الأخطاء الوراثية يجب أن تقرب الأعداد العشرية أي أكبر عدد ممكن من المنازل الهامة عند عملية الإدخال لتخزينها بالجهاز

(ب) الخطأ التقريبي المتوالد : ينتج هذا النوع من الخطأ من العمليات الحسابية بالجهاز للأعداد المخزنة حسب الدقة المفردة بالجهاز لنفرض أن لدينا جهازاً حاسباً آلياً مجزوء الكسري للدقة المفردة هو أربعة منازل هامة (4S) للأساس ($M=10$) مثل (حاسبة جيب بسيطة) أي أنه يقرب العدد الحقيقي X_e إلى أربعة منازل هامة ويقوم بتخزين العدد المقرب X_a كالآتي :

$$X_a = fl\ (X_e) = \pm 0.a_1a_2a_3a_4 * 10^{e_1} \quad ; \quad a_1 \neq 0$$
$$X_a \neq 0 \quad ; \quad e_1 \in (-9, +9)$$

فإذا كانت الأعداد المدخلة للحاسب هي

$b = 5678.3 \qquad C = 0.00413860 \qquad d = 0.40177312$

$g = 0.40187710 \qquad h = 60.0$

يكون تخزين هذه الأعداد بالجهاز المذكور بالحاسبة على الصورة التالية :

$b_a = 0.5678 \times 10^4 \qquad C_a = 0.4139 \times 10^{-2}$

$d_a = 0.4018 \times 10^0 \qquad g_a = 0.4019 \times 10^0 \qquad h_a = 0.6000 \times 10^2$

فإذا رمزنا للعمليات الحسابية المجزأة بالجهاز بالرموز

$\oplus$ للجمع ، $\ominus$ للطرح ، $\otimes$ للضرب $\oslash$ للقسمة

فالأخطاء المتولدة نتيجة إجراء العمليات الحسابية على هذه الأعداد المخزونة هي (i) أخطاء نتيجة جمع أو طرح عدد من عدد أصغر بكثير أو أكبر بكثير مثل $b+c$

$b+c = 5678.30413860$

بينما ناتج عملية الجمع باستخدام الجهاز المذكور يكون

$b_a \oplus c_a = 0.5678 \times 10^4 \oplus 0.4139 \times 10^{-2} = 5678 = b_a$

ويكون مقدار الخطأ الناتج

$|(b+c) - (b_a \oplus c_a)| = 0.30413860$

أي أن عملية الجمع هي عملية زائدة

وكذلك بالنسبة للطرح فإن $b_a \ominus c_a \simeq b_a$

هذه الأنواع من الأخطاء هو ما نطلق عليه بعمليات الجمع والطرح الزائدة.

(ii) الأخطاء ~~الناتجة~~ نتيجة عملية الضرب بعدد كبير أو القسمة على عدد صغير

$b * b = 32243091$

but $(b*b) - (b_a \otimes b_a) = 3091$

وهذا مقدار كبير

وكذلك في عملية القسمة $\left(\frac{b}{c}\right) - \left(\frac{b_a}{c_a}\right) = 34.021$

فهذه الأخطاء المتوالدة نتيجة عملية الضرب والقسمة تسبب كذلك في حدوث أخطاء كبيرة جداً وعادة نطلق على هذا النوع من الأخطاء بالأخطاء المتعاظمة Error Magnification

(iii) الأخطاء الناتجة عن فقدان بعض المنازل الهامة: وذلك نتيجة لتقريب المنازل حتى يمكن تخزينها بالثنائيات المحددة لوحدة التخزين و يحدث هذا النوع من الأخطاء عادة نتيجة طرح عددين قريبين جداً من بعض مثلاً =

$g - d = 0.0001091 = 0.1091 \times 10^{-3}$

بينما $g_a \ominus d_a = 0.0001 = 0.1000 \times 10^{-3}$

نجد أن ثلاثة منازل هامة فقدت نتيجة عملية الطرح مع أن المنزلة الهامة بالناتج $(g_a \ominus d_a)$ هي نتيجة المنزلة الهامة للعدد d_a, g_a

وبالتالي فطرح عددين قريبين من بعضهما يعطي أخطاء بالمنازل العشرية الأولى ولا شيء بالمنازل الباقية ولهذه الأسباب هذا النوع من ~~الأخطاء~~ الخطأ المترتب يطلق عليه بخطأ فقدان المنازل الهامة.

* ملاحظة: هناك بعض الطرق للتقليل من هذه الأنواع من الأخطاء أو تفاديها في بعض الحالات وذلك بأنه تحسب التعابير الرياضية بأقل عدد ممكن من العمليات الحسابية سواء بتحوير الطريقة أو باستخدام طرق أخرى أكثر ملائمة.

١

2015/10/11 م

المحاضرة الثالثة

* إيجاد قيمة كثيرة الحدود عند نقطة معينة :-
الدالة التي على الصورة

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

عندما $a_n \neq 0$ ، $a_0, a_1, \ldots, a_n$ كلها ثوابت

تسمى كثيرة حدود من الدرجة n في x.

مثال : إذا كانت

$$P(x) = x^5 - 8.6 x^4 + 38.782 x^3 + 17.25 x^2 - 4.5927 x + 10.5$$

احسب قيمة كثيرة الحدود عند النقطة $x = 2.5$ عشريا (4S)
(أربعة منازل هامة) ؟

الحل : إذا استخدمنا المعادلة السابقة لحساب $p(2.5)$
لأربعة منازل هامة نجد أن $p(2.5) = 474.7$ (4S)
نلاحظ هنا إننا أجرينا خمس عمليات (جمع وطرح)
و 18 عملية (ضرب).

ولكن يمكن أن نستخدم طريقة الضرب المتداخلة للتقليل من
عمليات الضرب وتفادي فقدان المنازل الهامة بقدر الإمكان

$$p(x) = ((((x - 8.6)x + 38.782)x + 17.25)x - 4.5927)x + 10.5$$

وبهذه الطريقة نجد أن هناك خمس عمليات (جمع وطرح) و
أربعة عمليات (ضرب) فقط

$$\therefore p(2.5) = 474.5 \quad (4S)$$

مقارنة بالقيمة الحقيقية $(p(2.5) = 474.51825)$ هناك
أربعة منازل هامة دقيقة بينما بالطريقة الأولى ثلاثة
منازل هامة دقيقة فقط.

وبصفة عامة : بالنسبة لكثيرة الحدود من الدرجة n التالية

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad , \quad a_n \neq 0$$

يمكن حساب قيمتها عند أي نقطة x باستخدام طريقة الضرب
التداخلي كالآتي :

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + a_n)\ldots)$$

* طريقة ايجاد قيمة الدالة الحدود عند نقطة بطريقة هورنر (Horner's Method)

اذا الدالة الحدود

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

يمكن التعبير عنها بالصورة التالية

$$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + b_0 \longrightarrow ①$$

حيث $Q(x)$ دالة حدود كالآتي

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

واذا كانت $x = x_0$ اذاً من العلاقة ① ينتج لنا

$$P(x_0) = (x_0 - x_0)\, Q(x_0) + b_0 = b_0$$

حيث b_0 تسمى بالحد الباقي وهي قيمة الدالة الحدود $P(x)$ عند النقطة $x = x_0$

ومن العلاقة ① نجد أن

$$P(x) = x\,Q(x) - x_0\,Q(x) + b_0$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمتغير x حيث x_0 كمية ثابتة ينتج لنا

$$P'(x) = x\,Q'(x) + Q(x) - x_0\,Q'(x) + 0$$

$$= Q(x) + (x - x_0)\, Q'(x)$$

$$\therefore \quad P'(x_0) = Q(x_0) \longrightarrow ②$$

ومن طريقة نيوتن رافسون لتقريب الجذور $P(x) = 0$ نجد أن

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})} \quad ; \quad n \geq 1 \longrightarrow ③$$

(أعداد صحيحة)

حيث n تعبر عن عدد جذور الدالة الحدود أي أنه اذا كان المطلوب القيمة التقريبية للجذر x_1 فإن الجذر المتوسط هذه الحالة يحسب كالآتي

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

3

وإذا أردنا الحصول على القيمة التقريبية للجذر الثاني x_2 يكون

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x)}{P'(x_1)}$$

... وهكذا

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})}$$

مثال: أوجد قيمة كثيرة الحدود التالية عندما $x_0 = -2$

$$p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$$

نطبق طريقة هورنر كما يأتي

$x = -2$					
	2	0	-3	3	-4
	↓	-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	(10) $= b_0$

$$\therefore p(x_0) = b_0 \Rightarrow p(-2) = 10$$

وبذلك تكون

$$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$$

مثال: أوجد القيمة التقريبية للجذر الأول عندما $x = 2$ لكثيرة الحدود

$$p(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6$$

الحل

$x = 2$					
	16	-40	5	20	6
	↓	32	-16	-22	-4
	16	-8	-11	-2	(2) $= b_0$

$$\because x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\therefore x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

$$\therefore x_1 = 2 - \frac{P(2)}{P'(2)}$$

وحيث أن $p'(2)=Q(2)$ فعلينا حساب $Q(2)$

$$\therefore Q(x) = 16x^3 - 8x^2 - 11x - 2$$

$x=2$				
	16	-8	-11	-2
	↓	32	48	74
	16	24	37	(72) $= b_0$

$$\therefore p'(2) = Q(2) = 72$$

$$\therefore x_1 = 2 - \frac{2}{72} \approx 1.97$$

إلى الفرق لا تهم

* متسلسلة تايلور

الصورة العامة لهذه المتسلسلة عند النقطة $x=a$ هي

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

حيث f دالة متصلة وقابلة للتفاضل في الفترة المحدودة وأن $|x-a|=R$ حيث R يسمى بنصف قطر التقارب.

وعندما تكون $a=0$ أي عندما تكون متسلسلة تايلور ~~حول~~ عند $x=0$ تسمى متسلسلة ماكلورين وتكون على الصورة

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

* نظرية تايلور: لتكن الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الأولى متصلة في الفترة بين x, x_0 عندئذٍ تعطى الدالة $f(x)$ بالعلاقة

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_{n+1}$$

حيث

$$R_{n+1} = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

وأن ξ تقع بين x, x_0

تسمى نظرية تايلور أيضاً نظرية المتبقي والمتبقي هو الحد R_{n+1}

من نظرية المتبقي نلاحظ أن الخطأ عند بتر المتسلسلة عند n من الحدود هو $|R_{n+1}|$ حيث

$$|R_{n+1}| \leq \left|\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\right|_{max} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

والحد $\left|\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\right|_{max}$ يمثل أكبر قيمة للمشتقة n+1 للدالة f

في الفترة من x إلى x.

* كيفية بتر متسلسلة تايلور :-

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + O(x-a)^3$$

أي إننا أهملنا حدود المتسلسلة من الرابع فأعلى فإن الخطأ يكون من الرتبة الثالثة أي $(x-a)^3$ ويكتب $O(x-a)^3$.

ملاحظة:

$$O(x-a)^{n+1} < O(x-a)^n$$

مثال - $f(x) = \sin x$ وباعتبار متسلسلة ماكلورين نحصل على

$$\sin x = \sin(0) + x\cos(0) - \frac{x^2}{2!}\sin(0) - \frac{x^3}{3!}\cos(0) + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + O(x)^4 = x - \frac{x^3}{3!} + O(x)^5$$

لأن معامل الحد x^4 يساوي الصفر

58
27
185

مثال: أوجد $e^{0.5}$ إلى $O(0.5)^3$ ؟

الحل: حيث أن الخطأ من رتبة $O(x)^3$ علينا أن نكتب e^x على الصورة

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x)^3$$

وحيث $x = 0.5$ تكون $e^{0.5}$ مساوية لـ $e^{0.5} = 1.625$ ثم ولمعرفة مقدار الخطأ نطبق نظرية الباقي كالآتي

$$|R_{n+1}| \le \left|\frac{d^3 e}{dx^3}\right|_{max} \frac{(0.5)^3}{3!} = 0.034348$$

أي أن الخطأ لا يتجاوز العدد 0.034348 ولكن الخطأ الحقيقي يساوي $1.625 - e^{.5} = 0.0237$

وبالمقارنة نجد أن تقدير الخطأ باستخدام الرتبة الثالثة (للخطأ) أعطى قيمة ليست بعيدة عن قيمة الخطأ الحقيقية.

ولكي نحصل على تقدير أفضل للخطأ علينا أن نرقى لرتبة أعلى في الخطأ أي أن نقوم بفك المتسلسلة بعدد العديد من الحدود.

مثال: احسب $Sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ حتى $O\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$

الحل:

$$\therefore Sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{(\pi/6)^3}{3!} + O\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$$

$$= 0.4996742 + O(\pi/6)^5 = 0.4998.752$$

* ملاحظة هامة: في مواضيع التحليل العددي يجب حساب الزوايا بالتقدير الدائري (rad) أي بالزاوية نصف قطرية

7

* تمرين للمناقشة :

احسب قيمة $\frac{1}{1-x}$ حتى $O(x)^4$ وذلك عندما $x = 0.2$ ؟ ثم قدر مقدار الخطأ ؟

الحل :

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$$

وبوضع $x = 0$ نحصل

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 6$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + O(x)^4$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}(2) + \frac{x^3}{6}(6) + O(x)^4$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + O(x)^4$$

$$\therefore f(0.2) = 1 + 0.2 + (0.2)^2 + (0.2)^3 = 1.248$$

ولتقدير الخطأ نطبق نظرية الباقي لتايلور

$$f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5}$$

$$f^{(4)}(x)\Big|_{max} = 24(1-0.2)^{-5} = 73.24$$

في الفترة $[0, 0.2]$ وبذلك يكون

$$|R_4| \leq \frac{(0.2)^4}{4!}(73.24) = 0.004883$$

ولكن الخطأ الحقيقي هنا هو

$$E = \frac{1}{1-0.2} - 1.248 = 0.002$$

الخامسة

* الفروق المحدودة

تعتبر من أهم الأدوات التي تستخدم في الطرق العددية ومن أنواع الفروق الأكثر استخداما

① الفروق الأمامية ② الفروق الخلفية ③ الفروق المركزية

تعريف: الفرق الأمامي الأول للدالة $f(x)$ عند $x = x_j$ يعرف كالآتي:

$$f(x_{j+1}) - f(x_j)$$

مع مراعاة الآتي: (i) يستخدم الرمز Δ للتعبير عن الفرق الأمامي الأول للدالة $f(x)$ حيث

$$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j) \longrightarrow [1]$$

أو يتم التعبير عن الفرق الأمامي الأول بالصورة

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j \longrightarrow [2]$$

كما يتم التعبير عن الفرق الأمامي الأول بالصورة

$$\Delta f(x_j) = f(x_j + h) - f(x_j) \longrightarrow [3]$$

فإذا تم استبدال القيمة x_j بالقيمة x فإنه يصبح

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \longrightarrow [4]$$

حيث العلاقة [4] هي عبارة عن تعريف المؤثر Δ.

(ii) الفرق الأمامي ذو المرتبة K يتم الحصول عليه كالآتي

$$\Delta^K f(x_j) = \Delta(\Delta^{K-1} f(x_j)) \longrightarrow [5]$$

حيث $\Delta^1 = \Delta$ ، $K \geq 2$

بمعنى: $\Delta^2 f_j$ يعبر عن فروق المرتبة الثانية الأمامية

$\Delta^3 f_j$ " " " الثالثة "

$\Delta^4 f_j$ " " " الرابعة "

... وهكذا، حتى $\Delta^n f_j$ يعبر عن فروق المرتبة النونية الأمامية.

مثال: اوجد قيمة كل من $\Delta^2 f(x_j) , \Delta^3 f(x_j)$

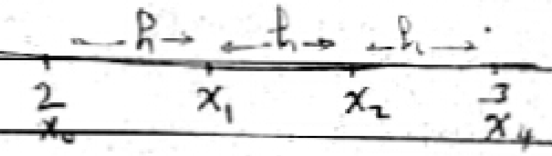
$$\therefore \Delta^2 f(x_j) = \Delta(\Delta f_j) = \Delta(f_{j+1} - f_j)$$
$$= \Delta f_{j+1} - \Delta f_j$$
$$= [f_{j+2} - f_{j+1}] - [f_{j+1} - f_j]$$
$$= f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$$

$$\Delta^3 f(x_j) = \Delta^3 f_j = \Delta(\Delta^2 f_j)$$
$$= \Delta(f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)$$
$$= \Delta f_{j+2} - 2\Delta f_{j+1} + \Delta f_j$$
$$= [f_{j+3} - f_{j+2}] - 2[f_{j+2} - f_{j+1}] + [f_{j+1} - f_j]$$
$$= f_{j+3} - 3f_{j+2} + 3f_{j+1} - f_j$$

ملاحظة: من خواص الفروق المحدودة انها تعتمد على اساس النقاط
تكون بين الفرق البعد اي $x_{j+1} - x_j = h$
يعني ان الفرق بينهم اي تقسيم متساوية تكون ثابت
ولتوضيح ذلك. اذا المتغير $x = 2(0.2)3$ يعني الاتي

$$2 \le x \le 3 \quad , h = 0.2$$

$$\therefore x_0 = 2$$



$$x_1 = x_0 + h = 2 + 0.2 = 2.2$$
$$x_2 = x_1 + h = 2.2 + 0.2 = 2.4$$
$$x_2 = x_0 + h + h = x_0 + 2h = 2 + 0.4 = 2.4$$
$$x_9 = x_2 + h = x_0 + 2h + h = x_0 + 3h = 2 + 0.6 = 2.6$$
$$x_4 = x_3 + h = x_0 + 4h = 2.8$$
$$x_5 = x_4 + h = x_0 + 5h = 3.0$$

وبالاستمرار نجد ان

$$x_i = x_0 + ih \quad , i = 0, 1, 2, \dots, n$$

مثال: كون جدول الفروق الأمامية للدالة $f(x)=3x^4-2x^3+x-1$
حيث $x=1(1)6$

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
1	1					
		32				
2	33		126			
		158		168		
3	191		294		72	
		452		240		0
4	643		534		72	
		986		312		
5	1629		846			
		1832				
6	3461					

من المثال السابق نلاحظ أن
$f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة 4 خاصة
$\Delta^4 f$ يكون مقدار ثابت والـ $\Delta^{4+1} f=\Delta^5 f$ يساوي صفر

مثال: كون جدول الفروق الأمامية لكثيرة الحدود $p(x)=x^3-3x^2+2x+1$
حيث $x=0(0.2)1$ ثم أوجد قيمة $k!\,h^k a_k$ حيث
k درجة كثيرة الحدود. (وتذكر [illegible]).

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	1					
		0.288				
0.2	1.288		-0.192			
		0.096		0.048		
0.4	1.384		-0.0144		0	
		-0.048		0.048		0
0.6	1.336		-0.096		0	
		-0.144		0.048		
0.8	1.192		-0.048			
		-0.192				
1.0	1					

لإيجاد قيمة $k!\,h^k a_k$

$\because k=3,\ h=0.2,\ a_3=1$

$\therefore 3!\,(0.2)^3(1)=0.048=\Delta^3 f$

$\therefore k!\,h^k a_k=\Delta^k f$ #

11

مثال: كوِّن جدول الفروق الأمامية للدالة $f(x)=x^3$ حيث $x=1(0.1)1.3$

ثم أوجد قيمة $f_4 = ?$

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1	1			
		0.331		
1.1	1.331		0.066	
		0.397		0.006
1.2	1.728		0.072	
		0.469		
1.3	2.197			

من الجدول يمكن حساب f_4 كالآتي

$$f_4 = f_3 + \Delta f_3 + \Delta^2 f_3 + \Delta^3 f_3 = 2.197 + 0.469 + 0.072 + 0.006$$

$$= 2.7444$$

* تمارين للمناقشة

س1/ اذا كانت المعلومات أدناه تمثل متعددة الحدود فأوجد درجتها

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	0.5	8	35.5	95.	198.5

س2/ أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة التي تمر بالنقاط التالية (الفروق الأمامية)

(0, −1) , (1, −3) , (2, 1) , (3, 17) .

/11/3

(1) السادسة 12

2010/11/22 ق

* تابع الفروق المحدودة

الفروق الخلفي:

تعريف: الفرق الخلفي الأول للدالة $f(x)$ عند $x = x_j$ يحسب كالآتي

$$f(x_j) - f(x_{j-1})$$

مع مراعاة أن الرمز ∇ يستخدم للتعبير عن الفرق الخلفي الأول للدالة $f(x)$ حيث أن

$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_{j-1})$$

$$\text{or } \nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$

ويتم التعبير أيضاً عن الفرق الخلفي الأول كالآتي

$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_j - h)$$

وعندما $x = x_j$ يكون

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

وهو تعريف المؤثر ∇ (نبلا)

ملاحظة: الفرق الخلفي ذو الرتبة K يتم الحصول عليه من العلاقة

$$\nabla^K f(x_j) = \nabla(\nabla^{K-1} f(x_j))$$

حيث $\nabla^1 = \nabla$ وأن $K \geq 2$

ملاحظة:

$$\because \nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$

يكون $\nabla^2 f_j = \nabla(f_j - f_{j-1}) = \nabla f_j - \nabla f_{j-1}$

$$= f_j - f_{j-1} - f_{j-1} + f_{j-2} = f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}$$

وهكذا يتم حساب $\nabla^3 f_j$ ...

* الفرق المركزي:

تعريف: الفرق المركزي للدالة $f(x)$ عند $x=x_j$ يعرف كالآتي:

$$f(x_{j+\frac{1}{2}}) - f(x_{j-\frac{1}{2}})$$

ويرمز له بالرمز δ للتعبير عن الفرق المركزي الأول للدالة $f(x)$ حيث

$$\delta f(x_j) = f(x_{j+\frac{1}{2}}) - f(x_{j-\frac{1}{2}})$$

or $$\delta f_j = f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}$$

وكذلك يتم التعبير عن الفرق المركزي الأول كالآتي

$$\delta f(x_j) = f(x_j + h) - f(x_j - h)$$

وعندما $x = x_j$ يكون

$$\delta f(x) = f(x+h) - f(x-h)$$

وهو تعريف للمؤثر δ .

* ملاحظة: الفرق المركزي من المرتبة K يتم الحصول عليه من العلاقة

$$\delta^K f(x_j) = \delta(\delta^{K-1} f(x_j))$$

حيث $\delta^1 = \delta \,,\, K \geq 2$

* مثال: أوجد قيمة $\delta^3 f(x_j)$ ؟

$$\therefore\ \delta^3 f(x_j) = \delta^3 f_j = \delta^2(\delta f_j)$$

$$= \delta^2(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) = \delta(\delta f_{j+\frac{1}{2}} - \delta f_{j-\frac{1}{2}})$$

$$= f_{j+\frac{3}{2}} - 3f_{j+\frac{1}{2}} + 3f_{j-\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{3}{2}}$$

س/ أثبت أن $\Delta^2 f_j + \nabla^2 f_j + \delta^2 f_j = \nabla(f_{j+2} - f_{j-1})$ ؟

جدول الفروقات ∇ ، Δ ، δ :

① جدول الفروق الأمامية Δ

j	x	$f_j(x)$	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$	$\Delta^4 f_j$
0	x_0	f_0				
			$f_1 - f_0 = \Delta f_0$			
1	x_1	f_1		$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$		
			$f_2 - f_1 = \Delta f_1$		$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \Delta^3 f_0$	
2	x_2	f_2		$\Delta f_2 - \Delta f_1 = \Delta^2 f_1$		$\Delta^3 f_1 - \Delta^3 f_0$
			$f_3 - f_2 = \Delta f_2$		$\Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1 = \Delta^3 f_1$	
3	x_3	f_3		$\Delta f_3 - \Delta f_2 = \Delta^2 f_2$		
			$f_4 - f_3 = \Delta f_3$			
4	x_4	f_4				

② جدول الفروق الخلفية ∇

j	x	$f_j(x)$	∇f_j	$\nabla^2 f_j$	$\nabla^3 f_j$	$\nabla^4 f_j$
0	x_0	f_0				
1	x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \nabla f_1$	$\nabla f_2 - \nabla f_1 = \nabla^2 f_2$		
2	x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \nabla f_2$	$\nabla f_3 - \nabla f_2 = \nabla^2 f_3$	$\nabla^2 f_3 - \nabla^2 f_2 = \nabla^3 f_3$	$\nabla^3 f_4 - \nabla^3 f_3 = \nabla^4 f_4$
3	x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \nabla f_3$	$\nabla f_4 - \nabla f_3 = \nabla^2 f_4$	$\nabla^2 f_4 - \nabla^2 f_3 = \nabla^3 f_4$	
4	x_4	f_4	$f_4 - f_3 = \nabla f_4$			

③ جدول الفروق المركزية δ

j	x	$f_j(x)$	δf_j	$\delta^2 f_j$	$\delta^3 f_j$
0	x_0	f_0			
			$f_1 - f_0 = \delta f_{1/2}$		
1	x_1	f_1		$\delta f_{3/2} - \delta f_{1/2} = \delta^2 f_1$	
			$f_2 - f_1 = \delta f_{3/2}$		$\delta^2 f_2 - \delta^2 f_1 = \delta^3 f_{3/2}$
2	x_2	f_2		$\delta f_{5/2} - \delta f_{3/2} = \delta^2 f_2$	
			$f_3 - f_2 = \delta f_{5/2}$		$\delta^2 f_3 - \delta^2 f_2 = \delta^3 f_{5/2}$
3	x_3	f_3		$\delta f_{7/2} - \delta f_{5/2} = \delta^2 f_3$	
			$f_4 - f_3 = \delta f_{7/2}$		
4	x_4	f_4			

نلاحظ انه في جدول ① Δ أسماء الاعمدة تنزل للاسفل « الميل سالب »

وفي الجدول ② ∇ أسماء الاعمدة للاعلى « الميل موجب »

وفي الجدول ③ δ أسماء الاعمدة أفقي « الميل = صفر »

* ملاحظة: من دراسة الجداول الثلاثة السابقة نجد أن

$$f_{n+1}-f_n=\Delta f_n=\nabla f_{n+1}=\delta f_{n+\frac{1}{2}}$$

فمثلا $n=1$ نجد أن

$$f_2-f_1=\Delta f_1$$
$$=\nabla f_2$$
$$=\delta f_{3/2}$$

* الفروق المقسومة:

تعريف: إذا كانت للدالة $f(x)$ القيم $f(x_j)$ عند النقاط $\{x_j\}$ فإن الفرق المقسوم من الرتبة الأولى بين x_i, x_j يعرف كالآتي:

$$f[x_i, x_j]=\frac{f[x_j]-f[x_i]}{x_j-x_i}$$

ملاحظة: ① التعبير $f[x_j]=f(x_j)$ ونقدم استخدام الأقواس [ ] للتعبير للفرق المقسوم

② لا يعتمد هنا الفرق على طول الخطوة أي المسافات بين x_i, x_j متساوية أم لا

③ من التعريف نجد أن $f[x_i, x_j]=f[x_j, x_i]$ أي أن الترتيب بين النقاط لا يهم

④ المستقيم الواصل بين $(x_i, f(x_i))$ و $(x_j, f(x_j))$ يصنع زاوية θ مع الأفقي فظلها $\tan\theta$ عبارة عن $f[x_i, x_j]$

⑤ الحالة العامة للفروق المقسومة:

$$f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}]=\frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+k}]-f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k}-x_j}$$

<u>مثال</u>: إذا كانت $f(x)=6x^3-2x^2-x+1$ أوجد

$f[2,0,1]$, $f[1,2,0,3]$

(16) (6)

(1) السابعة 16

2010/11/29 م — تحليل عددي ..

* العلاقة بين الفروق المحدودة والمقسمة :-

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!}\,\frac{\Delta^k}{h^k}\,f_j$$

$$= \frac{1}{k!}\,\frac{\nabla^k}{h^k}\,f_{j+k}$$

$$= \frac{1}{k!}\,\frac{\delta^k}{h^k}\,f_{j+k}$$

* حل المعادلات بالطرق العددية :-

إيجاد قيمة المعادلة أو المتغيرات في تلك المعادلة أي البحث عن جذر أو جذور المعادلة بالطرق التحليلية المختلفة ولكن نصادف في بعض الأحيان معادلة يصعب حلها باستخدام تلك الطرق أو يكون الحل على درجة عالية من التعقيد مثل المعادلات الآتية،

$$x - 3\sin x = 0$$

$$8.2x^5 + 2.3x + 2.7x^3 - 4x + 9.75 = 0$$

$$e^x - \tan(\sin x) + 2x^2 + x = 0$$

$$\ln(x+8) - 9x^7 + e^{\cos x} = 9$$

... وغيرها من المعادلات الصعبة.

لذلك نلجأ إلى استعمال بعض الطرق العددية لإيجاد التقريب العددي لجذر المعادلة $f(x)=0$ مع ملاحظة أن جذور المعادلة تعتمد على درجة المعادلة فإذا كانت درجة المعادلة هي 3 فذلك يعني أن للمعادلة 3 جذور أي حلول.

وسوف ندرس بعض الطرق العددية مثل

1- طريقة التكرار البسيط 2- التنصيف 3- نيوتن رافسون 4- القاطع

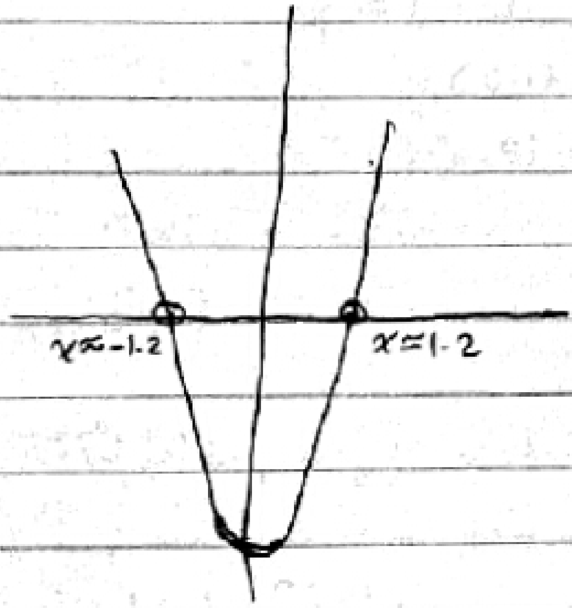
ومن التجذير بالملاحظة أن رسم منحنى الدالة f يؤدي إلى معرفة القيمة التقريبية للجذور. وهي القيمة التي عندها يقطع منحنى الدالة محور السينات.

مثال: أوجد جذور المعادلة $2x^2-3=0$

الحل

$f(x)=2x^2-3$

x	$f(x)$
0	-3
1	-1
-1	-1
2	5
-2	5



* طريقة التكرار البسيط:

المعادلة التي على الصورة $f(x)=0$ يمكن التعبير عنها بالصورة

$$x=g(x) \longrightarrow (1)$$

وذلك باستعمال بعض العمليات الحسابية، ونلاحظ أنه يوجد في بعض الأحيان أكثر من تعبير على الصورة $x=g(x)$

وأي قيمة تحقق $f(x)=0$ إذا كان وفقط إذا كان p تحقق العلاقة (1)

ونظراً لأننا نبحث عن جذر المعادلة $f(x)=0$ باستعمال إحدى الصور $x=g(x)$ فإننا نحتاج إلى نقطة بداية ولتكن p_0 ثم باستعمال التعويض المتكرر نحصل على $p_1, p_2, \dots, p_n$ وذلك من العلاقة التالية:

$$(2) \longleftarrow \begin{cases} p_n = g(p_{n-1}), & n=1,2,\dots \\ p_{n+1} = g(p_n), & n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

(3) 18

العلاقة [2] تعرف بالتكرار البسيط باستبدال نصل على الجذر
التقريبي للمعادلة $f(x)=0$

تعريف :- إذا كانت g دالة معرفة على الفترة $[a,b]$
$g(p)=p$ لبعض $p \in [a,b]$
فإن g دالة لها نقطة ثابتة p في $[a,b]$.

مثال :- الدالة $g(x)=x$ ، $0 \le x \le 1$
لها نقطة ثابتة لأي $x \in [0,1]$
$g(0.1)=0.1$
$g(0.5)=0.5$

مثال :- ارسم منحنى دالة $g(x)=x-\sin\pi x$
ثم من الرسم اوجد النقطة الثابتة عندما $x \in [0,1]$
الحل :

x	$g(x)$
0	0
1/4	-0.45
1/2	-1/2
3/4	0.04
1	1

من الجدول واضح ان النقاط الثابتة هي 0 ، 1
∴ النقطة الثابتة هي $x=0$ ، $x=1$
ونرسم $g(0)=0$ ، $g(1)=1$

نظرية :- إذا كانت $g \in C[a,b]$ + ~~$g(x) \in [a,b]$~~ لكل $x \in [a,b]$ ، فإن g لها نقطة ثابتة في $[a,b]$ بفرض
$g'(x)$ لها وجود على الفترة (a,b) وكان
$|g'(x)| \le K < 1$ لكل $x \in [a,b]$ فإن g لها
نقطة ثابتة وحيدة p في $[a,b]$

(4) 19

مثال: اذا كانت $g(x)$ دالة بحيث $g(x)=\frac{x^2-1}{3}$ فأثبت ان g لها نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[-1,1]$ ثم أوجد تلك النقطة؟

الحل

$$\because g(x) = \frac{x^2-1}{3} \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{3}x$$

$$|g'(x)| = |\tfrac{2}{3}x| \leq \tfrac{2}{3} < 1$$

لكل $x \in [-1,1]$

$\therefore$ للدالة $g(x)$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[-1,1]$

ونفرض ان النقطة الثابتة p ومن شروط النقطة الثابتة

أن $g(p) = p$

$$\therefore \frac{p^2-1}{3} = p \Rightarrow p^2 - 1 = 3p$$

$$\therefore p = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \qquad \therefore p_1 = 3.3028$$

$$p_2 = -0.3028$$

نستبعد p_1 لأن p_1 تقع خارج الفترة $[-1,1]$

$\therefore$ النقطة الثابتة الوحيدة هي $p_2 = -0.3028$.

ملاحظة: بالرجوع للعلاقة [2] نجد ان

$p_n = g(p_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$

فاذا فرضنا p_0 كقيمة تقريبية ابتدائية وتم توليد المتوالية $[p_n]_{n=0}^{\infty}$

فستكون تتقارب من p ، g دالة متصلة فان

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g[\lim_{n\to\infty}(p_{n-1})] = g(p)$$

عندها p تسمى حل للمعادلة $x=g(x)$ وبذلك فهي جذر من جذور المعادلة $f(x)=0$ وتسمى تلك الطريقة بطريقة تكرار النقطة الثابتة

(1) الثلاثاء 2010/12/6 م

20

مثال: المعادلة $x^3+4x^2-10=0$ لها جذر وحيد في الفترة [1,2]
أوجد ذلك الجذر باستخدام تكرار النقطة الثابتة عندما $P_0=1.5$ ؟

الحل
يمكن التعبير عن المعادلة السابقة بصور مختلفة على الصورة
$$x=g(x)$$
ومن هذه الصور

1) $\because x^3+4x^2-10=0$
$$x^3=10-4x^2$$
$$x^2=\frac{10}{x}-4x$$
$$\therefore x=\sqrt{\frac{10}{x}-4x}=\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{1/2}=g_1(x)$$

ومن قانون التكرار نعلم أن
$$P_n=g(P_{n-1})\ ;\ n=1,2,\dots\ ;\ P_0=1.5$$
وبالتعويض عن قيم n نجد أن
$$P_1=g(P_0)=g(1.5)=\left(\frac{10}{1.5}-6\right)^{1/2}=0.8165$$
وبما أن الناتج لا يساوي 1.5 نستمر في الحل
$$P_2=g(P_1)=g(0.8165)=2.9969$$
وهكذا نستمر في الحل مرة أخرى
$$P_3=g(P_2)=g(2.9969)=\infty$$
هذا يعني أن $x=g_1(x)$ ليس خيار موفق و نبحث عن صيغة أخرى لـ x

2) $\because x^3+4x^2-10=0$
$$x^2(x+4)=10$$
$$x^2=\frac{10}{x+4}\Longrightarrow x=\sqrt{\frac{10}{x+4}}=\left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2}=g_2(x)$$
$$P_1=g(P_0)=g(1.5)=1.34839973$$
نستمر في الحل إلى أن نصل إلى 1.5

(2) 21

$P_2 = g(P_1) = 1.36737637$

$P_3 = g(P_2) = 1.36495701$

$P_4 = g(P_3) = 1.36526475$

$\ldots\ldots \quad P_8 = g(P_7) = 1.36523002$

$P_9 = g(P_8) = 1.36523001$

$P_{10} = g(P_9) = 1.36523001$

$\therefore P_9 = g(P_9) = 1.36523001$

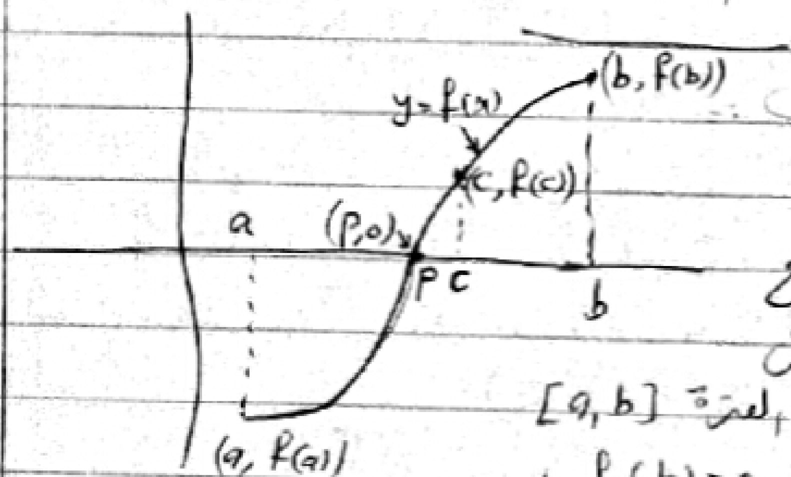
وهي النقطة الثابتة الوحيدة

$\therefore$ المتوالية $[P_n]_{n=0}^{\infty}$ ← تقترب من النقطة P_9

i.e. $\lim_{n\to\infty} P_n = P_9 = 1.36523001$

$\therefore$ هي الجذر الوحيد في الفترة $[1,2]$ للدالة $f(x)$

② بطريقة التنصيف :



الشكل المجاور يوضح منحنى الدالة $y=f(x)$

وهي دالة متصلة في الفترة $[a,b]$

ومن الرسم يكون $f(b)>0$ ،

$f(a)<0$ ومن ذلك يكون $f(a).f(b)<0$ ← [1]

نلاحظ ان $(p,0)$ نقطة تقع على منحنى الدالة ومن ذلك يكون

$x=p$ هو صفر للمعادلة $y=f(x)$ لأن $f(p)=0$

نلاحظ ان c نقطة تقع ما بين a,b فاذا كانت

$c=\frac{a+b}{2}$ فان c تقع في منتصف المسافة ما بين a,b وبالتالي

$p \in [a,c]$ اذا كان $f(a)\, f(b) < 0$

22

الطريقة التي تستعمل في إيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ لذلك الأسلوب تعرف بطريقة التنصيف
وتتلخص في الآتي..

① توفر شرط العلاقة [1] وهو لكي يكون للدالة f صفر (جذر للمعادلة $f(x)=0$) في الفترة $[a,b]$ يجب أن يكون $f(a)\cdot f(b)<0$

② إيجاد $c=\frac{a+b}{2}$ ثم إيجاد قيمة $f(c)$ فإذا كان

(i) $f(a)\cdot f(c)<0$ فإن الجذر يقع في الفترة $[a,c]$

(ii) $f(c)\cdot f(b)<0$ فإن الجذر يقع في الفترة $[c,b]$

(iii) $f(c)=0$ فيعني هذا أن $x=p=c$

③ إذا تحقق (i) أو (ii) فإننا نستمر في إيجاد نقاط منتصف المتتالية مع مراعاة العلاقة [1] في كل حالة حتى الوصول إلى فترة مناسبة تحصر أقرب قيمة تقريبية للجذر p وتحقق (iii) أو بمعنى آخر توليد المتوالية $[C_n]_{n=0}^{\infty}$ التي تتقارب مع الجذر $x=p$ أي $\lim_{n\to\infty} C_n = p$

تعريف: إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و $f(p)=0$ فإن p يدعى جذر المعادلة ويقال له أيضاً صفر الدالة f.

مثال: باستخدام طريقة التنصيف أوجد الجذر التكعيبي للعدد 5 مقرب إلى 5 أرقام عشرية (5 d.p)

الحل:

$$x=\sqrt[3]{5}=5^{1/3}$$

$$x^3=5 \Rightarrow x^3-5=0 \quad \therefore f(x)=x^3-5$$

نفرض فترة اختيارية ولتكن $[1,2]$

$$f(1)=1-5=-4 \quad , \quad f(2)=8-5=3$$

$$f(1)\cdot f(2)<0$$

وهذا يعني إنه يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ في الفترة $[1,2]$

$$C_0=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{1+2}{2}=1\tfrac{1}{2} \quad , \quad f(1\tfrac{1}{2})=-1.625$$

$$\Rightarrow \therefore f(C_0)\cdot f(b)<0$$

(4)

23

∴ الجذر يقع في الفترة [1.5 , 2]

$\therefore c_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$

$f(c_1) = f(1.75) = 0.359375$

$\Rightarrow f(1.5) \cdot f(1.75) < 0$

i.e $f(c_0) \cdot f(c_1) < 0$

∴ الجذر يقع في الفترة [1.5 , 1.75]

.... وهكذا نستمر في هذه العملية ونكون الجدول التالي

n	c_n	$f(c_n)$
⋮		
9	1.70996093	-0.00013166
⋮		
14	1.70991456	0.00013605
→ 15	1.70997619	0.00002196
16	1.70968563	-0.00006473

من الجدول نجد أن $c_{15} \approx 1.70998$ لأن $f(c_{15}) = 0.00000$

∴ الجذر التكعيبي التقريبي للعدد 5 هو

$p = c_{15} \approx 1.70998$

ونكون الفعلية هي 1.7099762

نلاحظ أن طريقة التنصيف بطيئة في التقارب حيث بلغت عدد التكرارات 15 تكرار.

* طريقة نيوتن رافسون :

مثال: $f(x)=x^3+4x^2-10$

أوجد صفر هذه الدالة التقريبي ~~p~~ الذي يحقق $f(p)=0$ لعدة خانات عشرية في الفترة $[1,2]$

$f(1) = 1+4-10 = -5$

$f(2) = 8+16-10 = 14$

$\therefore f(1) \cdot f(2) < 0$

$\therefore$ يوجد p_1 يقع ما بين $1,2$

let $p_1 = \frac{1+2}{2} = 1\frac{1}{2} = 1.3333 \quad (4D)$

$f(1.3333) =$ etc.

* نظرية: لنفرض أن $f \in C[a,b]$ وأن $f(a)f(b)<0$ عندئذ يولد إجراء التنصيف متتالية $\{p_n\}$ تقترب من p بالخاصية

$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n} \quad ; \quad n \ge 1$$

البرهان:

لكل $n \ge 1$ لدينا $p \in (a_n, b_n)$ حيث $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$

$\therefore p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, ~~$p \in (a_n, b_n)$~~ $\forall\, n \ge 1$

$\Longrightarrow$

~~$2 \to p$~~ $\quad |p_n - p| \le \frac{1}{2}(a_n + b_n) = 2^{-n}(b-a)$

نلاحظ أن $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow p$ وتكون هذه متتالية تقترب إلى الصفر بمعدل $O(2^{-n})$ من التقارب

ولكن هذه الطريقة ليست دقيقة بالقدر الكافي؟

2014/12/13

طريقة نيوتن رافسون

من أهم الطرق العددية المستخدمة في إيجاد حل المعادلة $f(x)=0$ طريقة نيوتن نظراً لاتساع انتشارها.

لكي نتعرف على أسلوب تلك الطريقة يمكن الاستعانة بكثيرة حدود تيلور حيث $f \in C^n[a,b]$

و $f^{(n+1)}$ لها وجود على الفترة $[a,b]$

وبوضع $x_0 \in [a,b]$ ولكل $x \in [a,b]$ يوجد $\xi(x)$ بين x, x_0 لذا

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

وأن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

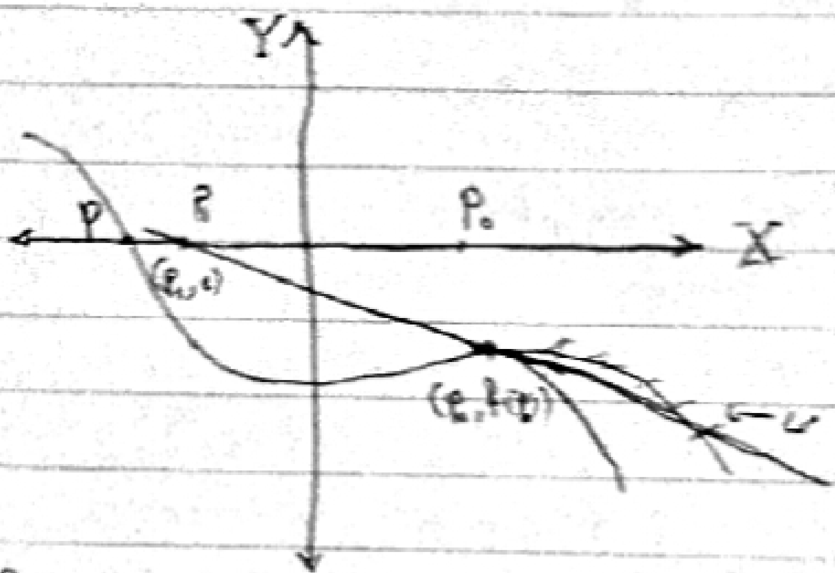
كثيرة الحدود $P_n(x)$ تسمى كثيرة حدود تيلور من الدرجة n للدالة f حول x_0، $R_n(x)$ يسمى الحد الباقي والجزء المقطوع المرتبط بـ $P_n(x)$ ويكون ~~$\lim_{n\to\infty} P_n(x)$~~

$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ يسمى بمتسلسلة تيلور للدالة f حول x_0

أو يمكن الاستعانة برسم المنحنى للدالة $y=f(x)$ حيث p جذر المعادلة $f(x)=0$ لأنها نقطة تقاطع المنحنى y مع محور السينات، p_0 القيمة التقريبية الابتدائية للجذر p ومن ثم p_1 نقطة تقاطع مماس المنحنى عند النقطة $(p_0, f(p_0))$ ومحور السينات. نحدد الرسم في هذه الحالة

P_1 أقرب من P_0 للجذر المضبوط P ، وحيث أن ميل المستقيم الواصل بين $(P_0, f(P_0))$ ، $(P_1, 0)$ هو

$$M = \frac{0 - f(P_0)}{P_1 - P_0} = \frac{-f(P_0)}{P_1 - P_0} \longrightarrow \boxed{1}$$



ونظراً لأن ذلك المستقيم هو مماس المنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(P_0, f(P_0))$ إذاً

$$\therefore M = f'(x) = f'(P_0) \longrightarrow \boxed{2}$$

نلاحظ من $\boxed{1}$ ، $\boxed{2}$ الآتي:

$$f'(P_0) = -\frac{f(P_0)}{P_1 - P_0}$$

$$f'(P_0)\,[P_1 - P_0] = -f(P_0)$$

$$\therefore P_1 - P_0 = -\frac{f(P_0)}{f'(P_0)} \Rightarrow P_1 = P_0 - \frac{f(P_0)}{f'(P_0)}$$

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$$ ويكون في الحالة العامة $n = 1, 2, 3, \ldots$

العلاقة الأخيرة تسمى طريقة نيوتن لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$

مثال: باستخدام طريقة نيوتن أوجد $\sqrt[3]{2}$ مقرب إلى (4 dp)
عندما $P_0 = 1$ ؟

الحل:

$\therefore x = \sqrt[3]{2} = 2^{1/3} \Rightarrow x^3 = 2$

$x^3 - 2 = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - 2$

$f'(x) = 3x^2$

$\therefore f(P_0) = f(1) = -1$

$f'(P_0) = f'(1) = 3$

$\therefore P_1 = P_0 - \dfrac{f(P_0)}{f'(P_0)}$

$\therefore P_1 = 1 - \dfrac{-1}{3} = 1.3333$

$\therefore f(P_1) = f(1.3333) = 0.3702$

$f'(P_1) = f'(1.3333) = 5.3331$

$\therefore P_2 = P_1 - \dfrac{f(P_1)}{f'(P_1)} = 1.3333 - \dfrac{0.3702}{5.3331} = 1.2639$

$f(P_2) = f(1.2639) = 0.0190$

$f'(P_2) = f'(1.2639) = 4.7923$

$P_3 = P_2 - \dfrac{f(P_2)}{f'(P_2)} = 1.2639 - \dfrac{0.0190}{4.7923} = 1.2599$

$f(P_3) = f(1.2599) = -0.0001$

$f'(P_3) = f'(1.2599) = 4.7620$

$\therefore P_4 = P_3 - \dfrac{f(P_3)}{f'(P_3)} = 1.2599 - \dfrac{-0.0001}{4.7620} = 1.2599$

$\therefore P_3 = P_4 = 1.2599$

$\therefore \sqrt[3]{2} \approx 1.2599 \quad (4\,d.s.)$

لاحظ: أن هذه الطريقة سريعة التقارب ومن مميزاته خاصة بطريقة
نيوتن.

تمارين

① باستعمال طريقة نيوتن أوجد حل المعادلة $\sin 3x = \cos 2x$
لأقرب (5d.p) ، $P_0 = 0$

② حل المعادلة $e^{-x} = x$ لأقرب (5d.p) بداية من $P_0 =$ [illegible] ؟

③ باستخدام طريقة نيوتن أوجد $\sqrt[3]{7}$ (4.d.p.) باستخدام
$P_0 = 2$ ؟

$f(x) = \sin 3x - \cos 2x$

$f'(x) = 3\cos 3x + 2\sin 2x$

$f(0) = -1 \qquad f'(0) = 3$

$P_1 = 0 + \frac{1}{3} = 0.33333$

$f(0.33333) = -0.98248$

$f'(0.33333) = 3.02282$

$P_2 = 0.33333 + \frac{0.98248}{3.02282} = 0.65835$

$f(0.65835) = -0.96527$

$f'(0.65835) = 3.04418$

$P_3 = 0.65835 + \frac{0.96527}{3.04418} = 0.97544$

Ans: 1

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$$

$f(x) = \sin 3x - \cos 2x$, $P_0 = 0$

$f'(x) = 3\cos 3x + 2\sin 2x$

$f(0) = -1$, $f'(0) = 3$

$P_1 = 0 - (-3) = 0.33333$ (5S)

$f(0.33333) = 0.05557$ (5S)

$f'(0.33333) = 2.85766$ (5S)

$$P_2 = 0.33333 - \frac{0.05557}{2.85766} = 0.31388 \text{ (5S)}$$

$f(0.31388) = -8.20898 \times 10^{-4}$ (5S)

$f'(0.31388) = 2.94006$ (5S)

$$P_3 = 0.31388 - \frac{-8.20898 \times 10^{-4}}{2.94006} = 0.31416 \text{ (5S)}$$

$f(0.31416) = 2.15906 \times 10^{-6}$ (5S)

$f'(0.31416) = 2.93892$ (5S)

$$P_4 = 0.31416 - \frac{2.15906 \times 10^{-6}}{2.93892} = 0.31416 \text{ (5S)}$$

$\therefore P_3 = P_4 = 0.31416$ (5S)

1C

Ans: 3

$x = \sqrt[3]{7}$, $P_0 = 2$

$x^3 = 7 \implies x^3 - 7 = 0$

$f(x) = x^3 - 7$

$f'(x) = 3x^2$

$f(2) = 1$, $f'(2) = 12$

$\therefore P_1 = 2 - \frac{1}{12} = 1.9167$ (4S)

$f(1.9167) = 0.0415$ (4S)

$f'(1.9167) = 11.0212$ (4S)

$P_2 = 1.9167 - \frac{0.0415}{11.0212} = 1.9129$ (4S)

$f(1.9129) = -3.4231631 \times 10^{-4}$

$f'(1.9129) = 10.9776$ (4S)

$P_3 = 1.9129 - \frac{-3.4231631 \times 10^{-4}}{10.9776} = 1.9129$ (4S)

$\because P_2 = P_3 = 1.9129$

$\therefore \sqrt[3]{7} \approx 1.9129$

Ans: 2 $e^{-x} = x$, $P_0 = 0$ (5S)

$f(x) = e^{-x} - x$, $f'(x) = -e^{-x} - 1$

$f(0) = 1$, $f'(0) = -2$

$P_1 = 0 - \frac{1}{-2} = 0.5$

$f(0.5) = 0.10653$ (5S), $f'(0.5) = -1.60653$ (5S)

$P_2 = 0.5 - \frac{0.10653}{-1.60653} = 0.56631$ (5S)

$f(0.56631) = 1.30608 \times 10^{-3}$ (5S)

$f'(0.56631) = -1.56762$ (5S)

$P_3 = 0.56631 - \frac{1.30608 \times 10^{-3}}{-1.56762} = 0.56714$ (5S)

$f(0.56714) = 5.15655 \times 10^{-6}$ (5S)

$f'(0.56714) = -1.56715$ (5S)

$P_4 = 0.56714 - \frac{5.15655 \times 10^{-6}}{-1.56715}$

$= 0.56714$ (5S)

$\therefore P_3 = P_4 = 0.56714$ (5S)

الاستيفاء Interpoletion ..

تعريف: الاستيفاء هي الطريقة التي تعطينا قيم $f(x)$ للقيم الموافقة بين قيم x المعطاة في الجدول

تعريف: القيم الحيوية هي القيم المجهولة لـ $f(x)$ والتي أخذت في هذه العملية

* نظرية الاستيفاء الخطي ..

لتقريب منحنى الدالة $f(x)$ عند $x = x_0 + rh$ نستخدم القاعدة التالية

$$f(x) \approx P_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0$$

حيث $r = \dfrac{x - x_0}{h}$, $0 \le r \le 1$

مثال (1): استخدم قاعدة الاستيفاء الخطي أوجد قيمة $\ln(7.2)$ ؟

الحل:

$\therefore f(x) \approx p_1(x) = f(x_0) + r[f(x_1) - f(x_0)] \longrightarrow ①$

$\because x = 7.2 \Rightarrow f(x) \approx P_1(x) = \ln(7.2)$ ⟵ ②

let $x_0 = 7 \Rightarrow f(x_0) = f(7) = \ln(7) = 1.9459$ ⟵ ③

let $x_1 = 7.5 \Rightarrow f(x_1) = f(7.5) = \ln(7.5) = 2.0149$ ⟵ ④

$\therefore r = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{7.2 - 7}{7.5 - 7} = 0.4$ ⟵ ⑤

بالتعويض من ② ، ③ ، ④ و ⑤ في ① نجد أن

$$f(x) \approx f(7) + 0.4[2.0149 - 1.9459]$$

$$\therefore \ln(7.2) \approx 1.9459 + 0.4[2.0149 - 1.9459] = 1.9735$$

** الاستيفاء التربيعي ..

تعريف: الاستيفاء التربيعي هو عبارة عن تقريب منحنى الاقتران والدالة $f(x)$ بين x_0 ، $x_2 = x_0 + 2h$ بمعادلة تربيعية تمر بالنقاط

$(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

والقاعدة هي: $f(x) \approx P_2(x) = f(x_0) + r\Delta f(x_0) + \dfrac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f(x_0)$

$r = \dfrac{x - x_0}{h}$; $0 \le r \le 1$

مثال: مستخدماً قاعدة الاستكمال الأمامي أوجد قيمة $\ln(7.2)$ ؟

إذا كان

$\ln(7) = 1.9459$, $\ln(7.5) = 2.0149$, $\ln(8) = 2.0794$

$\because f(x) \simeq f(x_0) + r\Delta f(x_0) + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f(x_0) \longrightarrow (1)$

$\because x_0 = 7 \Rightarrow f(x_0) = f(7) = \ln(7) = 1.9459$

$\because r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{7.2 - 7}{7.5 - 7} = 0.4$

x	$f(x)$	Δ	Δ^2
7	1.9459		
		0.0690	
7.5	2.0149		-0.0045
		0.0645	
8	2.0794		

من الجدول نجد أن

$\Delta f(x_0) = 0.0690$, $\Delta^2 f(x_0) = -0.0045$

وبالتعويض في (1) نجد أن

$\ln(7.2) \approx 1.9459 + (0.4)(0.0690) + \frac{0.4(0.4-1)}{2}(-0.0045)$

≈ 1.974 .

* ملاحظة: الصورة العامة لقاعدة الفروق الأمامية للاستكمال هي

$f(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$

حيث $x = x_0 + rh$, $r = \frac{x - x_0}{h}$; $0 \le r \le 1$

مثال: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ وإن $x = 1(0.05)1.30$ كوّن جدول الفروق الأمامية ثم من الجدول احسب قيمة $\sqrt{1.01}$ مستخدماً قاعدة الفروق الأمامية للاستكمال؟

الحل: $\because f(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0$

$x_0 = 1$, $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$

$\Delta f_0 = 0.02470$, $\Delta^2 f_0 = -0.00059$, $\Delta^3 f_0 = 0.00005$

$r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.01 - 1}{0.05} = \frac{1}{5}$

$\sqrt{1.01} \simeq 1.00499$. #

العلاقة العامة لإيجاد صيغة كثيرة الحدود هي :-

$$f(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \Delta y_0 + \frac{\frac{(x-x_0)}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots$$

مثال : أوجد صيغة كثيرة الحدود والتي تمر بالنقاط التالية
(2 , 8) , (4 , 20) , (6 , 40) , (8 , 68)

الحل :-

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
2	8			
		12		
4	20		8	
				0
		20		
6	40		8	
		28		
8	68			

من الجدول نجد أن $h = 2$

$x_0 = 2$, $\Delta y_0 = 12$, $\Delta^2 y_0 = 8$

$$f(x) = 8 + \frac{(x-2)}{2}(12) + \frac{(x-2)}{2}\left[\frac{(x-2)}{2} - 1\right]\frac{8}{2}$$

$$f(x) = x^2 + 4$$

وهي دالة كثيرة الحدود المطلوبة

* التفاضل العددي :-

* الصيغة العامة للمشتقة الأولى بدلالة Δ الفروق الأمامية :-

$$D(f(x)) = f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f - \frac{1}{2}\Delta^2 f + \frac{1}{3}\Delta^3 f - \dots\right]$$

مثال :-

إذا أعطيت البيانات التالية :

x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24

ما هي المشتقة الأولى Dy_0 أو $f'(x_0)$.

الحل : نكوّن جدول الفروق الأمامية ومن الجدول نجد أن

$h=1,\ x_0=1,\ y_0=0,\ \Delta f_0=3,\ \Delta^2 f_0=2\ \Delta^3 f_0 \dots$

وبما أن

$$Dy_0 = f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \dots\right]$$

$$\therefore Dy_0 = f'(x_0) = \frac{1}{1}\left[3 - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{3}(0) - 0 + 0\right] = 2$$

* التكامل العددي :-

* قاعدة شبه المنحرف :-

$$I_T = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right]$$

وهي إيجاد المساحة تحت المنحني للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ وهذه الطريقة فيها خطأ ولتقليل مقدار هذا الخطأ نقسم هذه الفترة إلى أكبر عدد من الفترات الجزئية ويكون مقدار الخطأ صغير جداً عندما n تكون كبيرة جداً حيث قيمة $h=\frac{b-a}{n}$

مثال : باستخدام طريقة شبه المنحرف أوجد $\int_4^{5.2} \ln x\,dx$ آخذاً $n=6$ مقرباً (6Dp) ؟

الحل

$\because n=6,\ f(x)=\ln x,\ a=4,\ b=5.2$

$$\therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{5.2-4}{6} = 0.2$$

ثم نكوّن الجدول التالي

x	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5	5.2
$f(x)$	1.386294	1.435085	1.481605	1.526056	1.568616	1.609438	1.648654

الآن نطبق القانون

$$I_T = \frac{0.2}{2}\left[1.386294 + 1.648654 + 2(1.435085 + 1.48165 + 1.52656 + 1.56806 + 1.609438)\right] = 1.827655$$

* قاعدة سمبسون لايجاد التكامل العددي

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_n + 4\sum_{i=1,3}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4}^{n-2} f_i\right]$$

حيث n عدد زوجي.

مثال: أوجد قيمة $I = \int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$ باعتبار $h=0.1$ باستخدام

(1) طريقة سمبسون، (2) طريقة شبه المنحرف، ستة أرقام عشرية (6Ds)

الحل (1) $\therefore a=0,\ b=0.6,\ h=0.1,\ f(x)=e^{-x^2}$

$$\therefore n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.6-0}{0.1} = 6$$

ثم نكون الجدول التالي

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	1	.990050	.960789	0.91393	.852144	.778801	.697676

من الجدول نحصل:

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_6 + 4(f_1+f_3+f_5) + 2(f_2+f_4)\right]$$

$$= 0.535156$$

حل (2)

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_6 + 2(f_1+f_2+f_3+f_4+f_5)\right]$$

$$= 0.534455$$

* مثال: من الجدول التالي

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	0.8012	0.7614	0.7119	0.6837	0.6226	0.5993	0.5412

أوجد $I = \int_1^{1.6} (x^2+y^2)\,dx$ باستخدام قاعدة سمبسون؟

∴ بما أن التكامل هو x^2+y^2 لذلك نضيف الصف للجدول

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
x^2+y^2	1.6419	1.7897	1.9468	2.1574	2.3476	2.6092	2.8529

$$\therefore I_S = 1.3103$$

تابع التفاضل العددي :-

* الصورة العامة للمشتقة الأولى بدلالة الفروقات المركزية :

$$D = \frac{1}{h}\left[\delta - \frac{1}{24}\delta^3 + \frac{3}{640}\delta^5 - \cdots\right]$$ (حالة x_0 موجودة بالجدول)

* الصورة العامة للمشتقة الثانية بدلالة الفروقات المركزية :

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left[\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - \frac{1}{560}\delta^8 + \cdots\right]$$

* الصورة العامة للمشتقة عند نقاط ليست موجودة بالجدول :

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \left(r - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3r^2 - 6r + 2)\Delta^3 f_0 + \cdots\right]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + (r-1)\Delta^3 f_0 + \cdots\right]$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 f_0 + \cdots\right]$$

* الصورة العامة للمشتقة الأولى عند نقاط غير موجودة في جدول البيانات باستخدام قاعدة إفريت البسيطة :-

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[f_1 - f_0 + \frac{1}{6}(3r^2 - 1)\delta^2 f_1 - \frac{1}{6}(2 - 6r + 3r^2)\delta^2 f_0 + \cdots\right]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[r\,\delta^2 f_1 + (r-1)\,\delta^2 f_0 + \cdots\right]$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left[\delta^2 f_1 - \delta^2 f_0 + \cdots\right]$$

مثال

x	4	6	8	10
$f(x)$	1	3	8	20

كون معادلة $f(x)$ التي تحقق الجدول السابق ثم أوجد

كون جدول الفروق المركزية ثم احسب $f'(6)$ ، $f''(6)$ ، $f'(6.5)$ ، $f''(6.5)$ ؟

قاعدة الاستكمال للاجرانج :

$$y = L(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)\, y_i$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$L_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i \neq j \\ 1 & \text{if} \quad i = j \end{cases}$$

نظرية : إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة وقابلة للتفاضل لعدد n من المرات على الفترة $I=[a,b]$ ونفرض أن $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ هي نقاط مختلفة وموجودة بالفترة $[a,b]$ فإنه يوجد عدد ξ بالفترة $[a,b]$ حيث

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

مثال : أنشئ جدول الفروق المقسومة للدالة $f(x)=e^{-x}$ على الفترة $[0.02, 0.06]$. حدد القيم التقريبية للمشتقة $f''(x)$ ، $f'''(x)$

X	F(x)	1-DD	2-DD	3-DD	4-DD
0.02	0.98019867				
		-0.975314			
0.03	0.97044553		0.48525		
		-0.9656509		$-0.16\bar{3}$	
0.04	0.96078944		0.48035		$-0.1\bar{6}$
		-0.956002		$-0.15\bar{6}$	
0.05	0.9122942		0.47565		
		-0.946489			
0.06	0.94176453				

$$\therefore f''(\xi) = 2!\, f[x_0, x_1, x_2] \quad , \quad \xi \in [x_0, x_2]$$

$$= 2(0.48525) = 0.9705$$

$$\because 0.9608 \le f''(\xi) \le 0.9802 \Rightarrow 0.02 \le \xi \le 0.04$$

also:

$$f'''(\xi) = 3!\, f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 6[-0.16\bar{3}] = -0.98$$

$$0.158538236 \le \frac{f'''(\xi)}{6} \le 0.16336644 5$$

أي أنه لقيمة ξ داخل الفترة $[0.02, 0.05]$ فإن

$$0.951229419 \le f'''(\xi) \le 0.98019867$$

ويمكن تعيين قيمة ξ

$$f'''(\xi) = e^{-\xi} = -0.98 \Rightarrow -\xi = \ln|-0.98| \Rightarrow \xi = 0.020202707$$

---

* كتابة صورة نيوتن بالفروق المقسومة :

$$P_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

$$P_3(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$